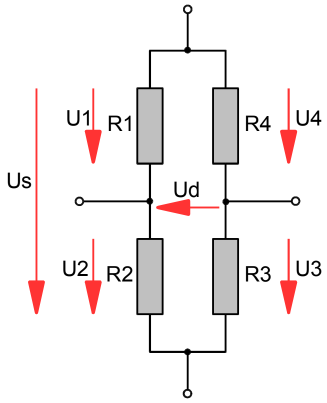
# Grundlagen zur Wheatstone'schen Brückenschaltung

Stand: 14.07.2012

## Herleitung der Brückengleichung

Die Brückenschaltung besteht aus zwei parallelgeschalteten Spannungsteilern.
Beide Spannungsteiler werden von einer gemeinsamen Spannungsquelle mit der Brückenpeisespannung Us versorgt.
Die Diagonalspannung zwischen den Spannungsteilern wird als Differenzspannung Ud bezeichnet.




Durch Anwenden des ohmschen Gesetzes erhält man:

$$\frac{U1}{U2}=\frac{R1}{R2};\quad \frac{U4}{U3}=\frac{R4}{R3}\quad \text{Gl. 1}$$

Durch Anwenden der Maschenregel erhält man:

$$U1+U2=Us;\quad U4+U3=Us\quad \text{Gl. 2}$$

Durch Einsetzen von Gl. 2 in Gl. 1 erhält man

$$\frac{Us}{R1+R2}=\frac{U1}{R1};\quad \frac{Us}{R3+R4}=\frac{U4}{R4};\quad \text{Gl. 3}$$

Die Differenzspannung Ud erhält man durch Anwendung der Maschenregel:

$$U1-Ud-U4\ =\ 0\quad \text{Gl. 4}$$

Durch Einsetzen von Gl. 4 in Gl. 3 erhält man die Brückengleichung:

$$\frac{Ud}{Us}\ =\ \frac{R1}{R1+R2}\ -\ \frac{R4}{R3+R4}\ =\ f\left(R1, R2, R3, R4\right)\quad \text{Gl. 5}$$

Durch Anwenden des totalen Differentials gelangt man zur linearisierten Form der Brückengleichung:[1]

$$\frac{\Delta Ud}{Us}\ =\ \frac{\partial f}{\partial R1}\cdot\Delta R1\ +\ \frac{\partial f}{\partial R2}\cdot\Delta R2\ +\ \frac{\partial f}{\partial R3}\cdot\Delta R3\ +\ \frac{\partial f}{\partial R4}\cdot\Delta R4\quad \text{Gl. 6}$$

$$\frac{\Delta Ud}{Us}\ =\ \frac{\Delta R1}{R1}\ -\ \frac{\Delta R2}{R2}\ +\ \frac{\Delta R3}{R3}\ -\ \frac{\Delta R4}{R4}\quad \text{Gl. 7}$$

1 Alternativ, aber sehr mühevoll gelangt man zur linearisierten Forn der Brückengleichung, indem man für die Subtraktion die beiden Terme in Gl. 5 auf einen gemeinsamen Nenner bringt, für Ri wird Ri+ΔRi geschrieben, alles wird ausmultipliziert, und alle quadtratischen Terme $\Delta Ri^2$ werden dann vernachlässigt...

## Brückengleichung für die DMS-Viertelbrücke

Für die Spannungsanalyse mit Dehnungsmessstreifen und für die Shunt-Kalibrierung ist es interessant, wie groß der Fehler durch Anwendung der linearisierten Brückengleichung ist.
Im Folgenden werden die exakte Lösung hergeleitet und der Fehler beziffert, der durch Anwendung der linearisierten Brückengleichung entsteht.

In der Spannungsanalyse mit Dehnungsmessstreifen gelten folgende Bedingungen:

$$R1 = R+\Delta R; \quad R2 = R3 = R4 = R \quad \text{Gl 8}$$

Durch Einsetzen von Gl. 8 in Gl. 5 erhält man:

$$\frac{Ud}{Us} = \frac{R+\Delta R}{2\mathrm{R}+\Delta R} - \frac{1}{2} \quad \text{Gl. 9}$$

Durch Erweitern der beiden Terme auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{Ud}{Us} = \frac{\Delta R}{4\mathrm{R}+2\Delta\mathrm{R}} = \frac{\Delta R}{R}\cdot\frac{1}{4+2\frac{\Delta R}{R}} = \frac{1}{4}\frac{\Delta R}{R}\cdot\frac{1}{1+\frac{\Delta R}{2\mathrm{R}}} \quad \text{Gl. 10}$$

Der nichtlineare Anteil in der Gleichung für die Dehnungsmessstreifen Viertelbrücke ist:

$$\frac{1}{1+\frac{\Delta R}{2\mathrm{R}}} \quad \text{Gl. 11}$$

Die mit der linearisierten Brückengleichung berechnete Brückenverstimmung ist zu groß.
In der Spannungsanalyse mit Dehnungsmessstreifen stellt sich die umgekehrte Frage:
Die aus der gemessenen Brückenverstimmung berechnete Widerstandsänderung (bzw. Dehnung) ist zu klein.

In der Praxis wird die Brückenverstimmung gemessen, um daraus die Widerstandsänderung (bzw. Dehnung) zu berechnen.
Im Folgenden wird die exakte Lösung für die DMS Viertelbrücke hergeleitet:

## Berechnung der Dehnung aus der gemessenen Brückenverstimmung

Aus Gleichung 10 erfolgt durch Umstellen:

$$\begin{aligned}
&(4\mathrm{R}+2\Delta\mathrm{R})\cdot\frac{Ud}{Us} = \Delta R; \\
&4\frac{Ud}{Us}+\frac{\Delta R}{R}\left(2\frac{Ud}{Us}-1\right) = 0; \\
&\frac{\Delta R}{R}\left(1-2\frac{Ud}{Us}\right) = 4\frac{Ud}{Us}; \qquad \text{Gl. 12} \\
&\frac{\Delta R}{R} = 4\frac{Ud}{Us}\cdot\frac{1}{1-2\frac{Ud}{Us}}
\end{aligned}$$

Der nichtlineare Anteil für die DMS Viertelbrücke ist in Gleichung 13 als Korrekturfaktor ausgewiesen. Die mit den linearen Gleichungen ermittelte Dehnung muss mit dem Korrekturfaktor multipliziert werden, um die exakte Lösung zu erhalten.

$$c=\frac{1}{1-2\frac{Ud}{Us}}$$ Gl. 13

| | linearisierte Lösung | | exakte Lösung |
|---|---|---|---|
| **Ud/Us in mV/V** | **Ɛ in µm/m** | **Korrekturfaktor „c“** | **Ɛ1 in µm/m** |
| 0,005 | 10 | 1,00001 | 10,0001 |
| 0,01 | 20 | 1,00002 | 20,0004 |
| 0,02 | 40 | 1,00004 | 40,0016 |
| 0,05 | 100 | 1,00010 | 100,0100 |
| 0,1 | 200 | 1,00020 | 200,0400 |
| 0,2 | 400 | 1,00040 | 400,1601 |
| 0,5 | 1000 | 1,00100 | 1001,0010 |
| 1 | 2000 | 1,00200 | 2004,0080 |
| 2 | 4000 | 1,00402 | 4016,0643 |
| 5 | 10000 | 1,01010 | 10101,0101 |

*Tabelle 1: Korrekturfaktor c als Funktion der linearen Dehnung bzw. der gemessenen Brückenverstimmung*

Der Korrekturfaktor kann als eine Funktion der gemessenen Brückenverstimmung ausgewiesen werden. Legt man einen k-Faktor von 2,0 zugrunde, kann zur Orientierung auch eine entsprechende Dehnung ausgewiesen werden.

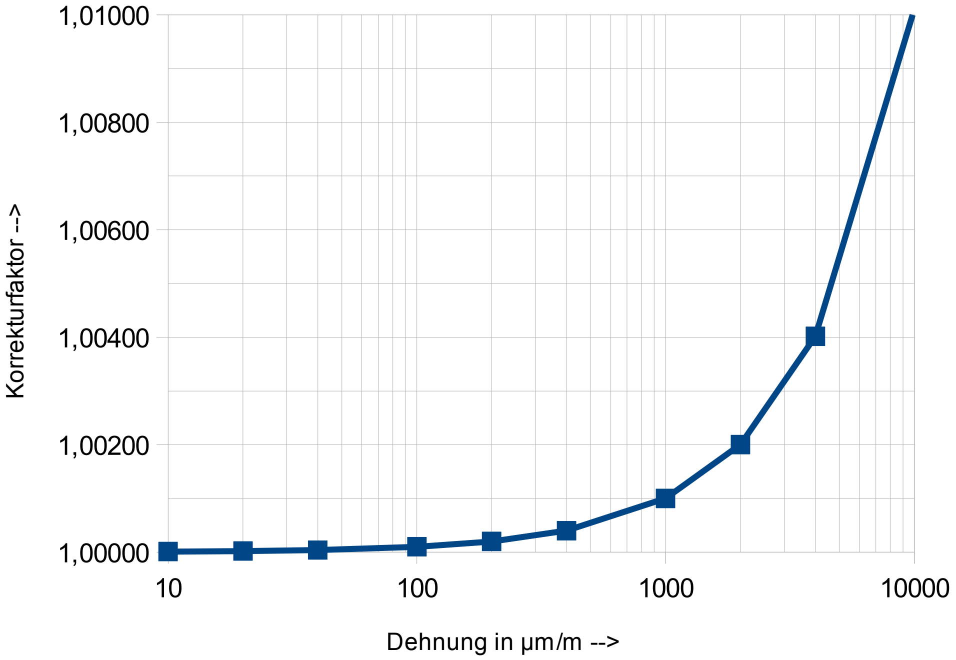



*Abbildung 1: Korrekturfaktor als Funktion der (linearisierten) Dehnung.*

Bei einer mit den linearen Gleichungen für eine Viertelbrücke mit k-Faktor errechneten Dehnung von 1000µm/m beträgt die tatsächliche Dehnung 1001 µm/m.

## Gleichungen zur Bestimmung des Shunt-Widerstands

Durch die Parallelschaltung eines Shunt-Widerstands Rp an einem der vier Brückenwiderstände R ergibt sich eine Widerstandsänderung ΔR:

$$\Delta R = \frac{R \cdot Rp}{R+Rp} - R \quad \text{Gl. 14}$$

Umgeformt als relative Widerstandsänderung erhält man:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{Rp}{R+Rp} - 1$$

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{R}{R+Rp} \quad \text{Gl. 15}$$

Setzt man Gl. 15 in Gl. 12 ein und verwendet den Korrekturfaktor c aus Gl. 13 für den nichtlinearen Anteil, dann erhält man:

$$\frac{R}{R+Rp} = 4\frac{Ud}{Us} \cdot c$$

$$\frac{R+Rp}{R} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\frac{Ud}{Us}} \quad \text{Gl. 16}$$

$$Rp = R \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{Ud}{Us}} \cdot \frac{1}{c} - 1\right)$$

Mit Gleichung 16 ist es nun möglich, den erforderlichen Shunt Widerstand in Abhängigkeit von der gewünschten Brückenverstimmung Ud/Us zu bestimmen Wenn der Term 1/c berücksichtigt wird, erhält man die exakte Lösung, ohne den Term 1/c die linearisierte Lösung.

## Auswahl von Shunt-Widerständen

Die Tabelle 2 zeigt, dass ein Shunt-Widerstand von 86975 Ohm eine Brückenverstimmung von 1,000 mV/V verursacht.

| | | | linearisierte Lösung | exakte Lösung |
|---|---|---|---|---|
| **Ud/Us in mV/V** | **Korrekturfaktor „c“** | | **Rp in Ohm** | **Rp1 in Ohm** |
| 0,005 | 1,00001 | | 17499650 | 17499475 |
| 0,01 | 1,00002 | | 8749650 | 8749475 |
| 0,02 | 1,00004 | | 4374650 | 4374475 |
| 0,05 | 1,00010 | | 1749650 | 1749475 |
| 0,1 | 1,00020 | | 874650 | 874475 |
| 0,2 | 1,00040 | | 437150 | 436975 |
| 0,5 | 1,00100 | | 174650 | 174475 |
| **1** | 1,00200 | | **87150** | **86975** |
| 2 | 1,00402 | | 43400 | 43225 |
| 5 | 1,01010 | | 17150 | 16975 |

*Tabelle 2: Shunt-Widerstand Rp als Funktion der Brückenverstimmung (Gl. 16, 13) (k-Faktor = 2, Brückenwiderstand = 350 Ohm)*

Die Tabelle 3 zeigt, dass ein Shunt-Widerstand von 87150 Ohm eine Dehnung von 2000 µm/m simuliert und eine Brückenverstimmung von 0,998 mV/V verursacht.

| exakte Lösung | linearisierte Lösung | | linearisierte Lösung | exakte Lösung |
|---|---|---|---|---|
| **Ɛ1 in µm/m** | **Ɛ in µm/m** | **Ud/Us in mV/V** | **Rp in Ohm** | **Rp1 in Ohm** |
| 10 | 9,9999 | 0,00499995 | 17499825 | 17499650 |
| 20 | 19,9996 | 0,0099998 | 8749825 | 8749650 |
| 40 | 39,9984 | 0,0199992 | 4374825 | 4374650 |
| 100 | 99,99 | 0,049995 | 1749825 | 1749650 |
| 200 | 199,96 | 0,09998 | 874825 | 874650 |
| 400 | 399,84 | 0,19992 | 437325 | 437150 |
| 1000 | 999 | 0,4995 | 174825 | 174650 |
| **2000** | 1996 | **0,998** | **87325** | **87150** |
| 4000 | 3984 | 1,992 | 43576 | 43400 |
| 10000 | 9900 | 4,95 | 17327 | 17150 |

*Tabelle 3: Shunt-Widerstand Rp und Dehnungen Ɛ und Ɛ1 als Funktion der Brückenverstimmung (Gl. 16, 13, 12). (k-Faktor = 2, Brückenwiderstand = 350 Ohm)*